



ISTITUTO INTERNAZIONALE STUDI AVANZATI DI  
SCIENZE DELLA RAPPRESENTAZIONE DELLO SPAZIO  
Geometria proiettiva, Geometria descrittiva, Rilevamento, Fotogrammetria

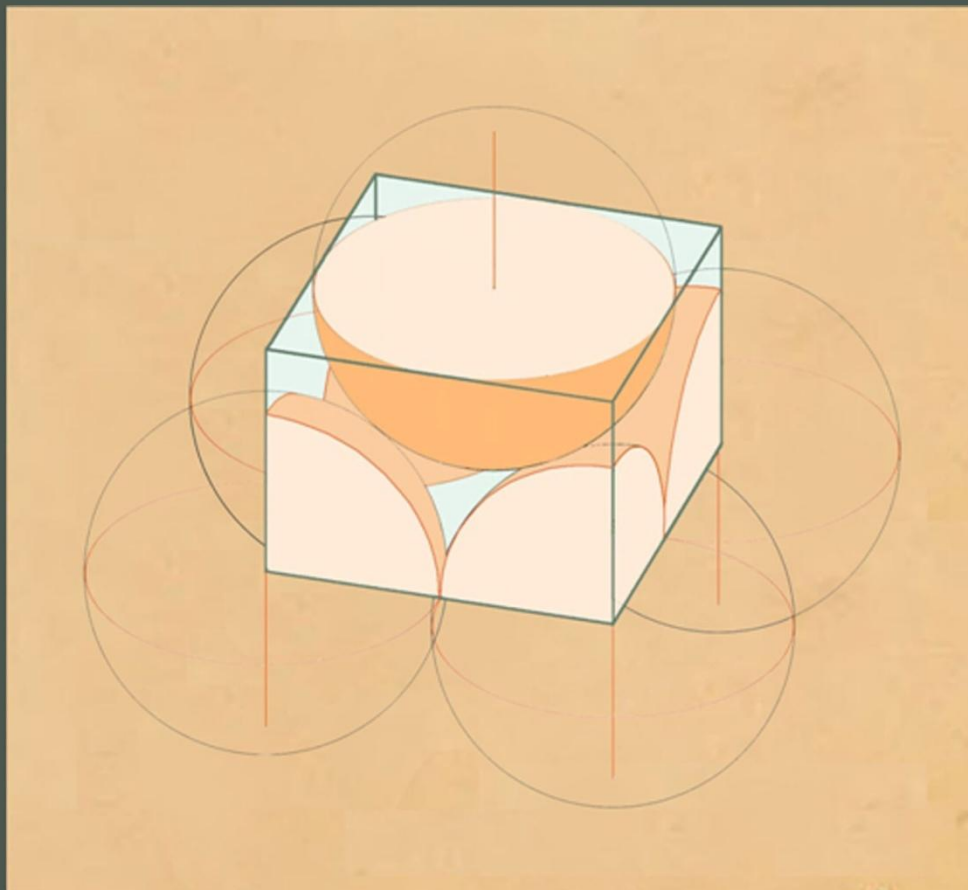
INTERNATIONAL INSTITUTE FOR ADVANCED STUDIES OF  
SPACE REPRESENTATION SCIENCES

Projective geometry, Descriptive geometry, Survey, Photogrammetry

*Palermo, Italia*

*Giuseppe Maria Catalano*

DIMOSTRAZIONE GEOMETRICA PROIETTIVA  
DELLA CONGETTURA DI KEPLERO SULLA  
MASSIMA DENSITA' DI UN AGGREGATO DI SFERE



# PROJECTIVE GEOMETRICAL DEMONSTRATION OF KEPLER CONJECTURE ON GREATEST DENSITY OF A GROUP OF SPHERES

Giuseppe Maria Catalano

2011

Kepler's conjecture on the packing of spheres, was till now considered one of the great mathematical non resolved problems.

In 1931 Carl Friedrich Gauss mathematically demonstrated the conjecture in case of regular distribution, but not in case of any distribution.

In 1998 the mathematician Thomas Hales announced the demonstration through a hundred fifty variables function, by means of two hundred fifty pages of annotations and three gigabytes of software and data.

In that time the revisers were sure of exactitude only at ninety nine per cent and the worldwide mathematical community wasn't and isn't agree on the validity of computer aided demonstration.

The theorem below enunciated not only proves the validity of Kepler's conjecture, but too the simplicity, brevity and elegance of the projective geometrical solutions.

## THEOREM ON THE MAXIMUM DENSITY OF AN AGGREGATE OF MEDIA SPACE SPHERES OF THE EQUAL DIAMETER

*The aggregate of spheres of equal diameter which has a maximum average density in space is that according to a face-centered cubic lattice.*

Consider in the orthogonal projection eight spheres of an aggregate unlimited, spheres having equal diameter  $d$  and centers  $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7, C_8$ , vertices of a regular rhombohedron with  $d$  side, with the face  $C_1, C_2, C_3, C_4$  belonging to the projection plane. The vertices  $C_5, C_6, C_7, C_8$  don't belong to the projection plane and are projected in  $C'_5, C'_6, C'_7, C'_8$ .

This rhombohedron is cell of the aggregate, portion of the aggregate that, by translation and union of similar infinite cells, fills the totality of the space.

Any rhombohedron of  $d$  side always contains only the entire volume of a sphere, because the eight solid angles inside the cell are equal to the eight solid angles at the common vertex of eight cells.

The ratio between the volume of the sphere and the volume of the cell provides the density of the aggregate.

If the cell rhombohedral  $R$ , corresponding to the aggregate of spheres according to a face-centered cubic lattice, is the cell of minimum volume, then this aggregate also has a maximum average density of spheres, because it is able to fill the totality of the space, by translation and union of similar endless cells. Any other portion, having the same shape rhombohedral  $R$ , cannot have density higher than  $R$ .

Consider, therefore, the rhombohedral cell and all the possible forms which it may assume, if each sphere of the aggregate has the maximum number of spheres tangent to itself.

This condition is equivalent to saying that the triangle  $C_1 C_2 C_5$  of the rhombohedron is always equilateral. If this happens, you are sure that the spheres with centers  $C_5, C_6, C_7, C_8$  are tangent to the spheres with centers  $C_1, C_2, C_3, C_4$ .

Consider, therefore, the rhombohedral cell with spheres arranged in a face-centered cubic lattice (Fig. 4).

The height  $h^I$  of the cell, expressed by the share of  $C_5^I$  respect to the projection plane, is obtained by overturning on the projection plane of the plane belonging  $C_1$  and  $C_5$  orthogonal to the projection plane.

The circle with center  $C_1$  and radius  $d$  intersects the projecting straight line  $C_1 C_5^I$ , overturned on the projection plane, at the point  $(C_5^I)$ . The segment  $C_1 (C_5^I)$  provides therefore the height  $h^I$  of the cell (Fig. 3).

Move any spheres keeping the centers of these vertices of the regular rhombohedron, until the aggregate assumes, in form II, the hexagonal lattice (Fig. 5). The height  $h$  of the cell, obtained by overturning as before, changes until the value  $h^{II}$  (Fig. 3).

All the possible forms assumed by rhombohedron, excluding the interpenetration between the spheres, are included between the form II, in which internal solid angle in  $C_1$  assumes the minimum value, and the form III, in which the rhombohedron assumes the shape of a cube (Fig. 6) and internal solid angle in  $C_1$  has the value of  $1/8$  of the maximum solid angle. In fact further extensions of this solid angle would reproduce forms of the solid already included among the preceding forms.

Moving the spheres from form I to II until the III, an increase of  $h$  is always obtained, irrespective of the trajectory, with a maximum value in III, because  $h$  is perpendicular to the projection plane and equal to  $d$  (Fig. 6).

The volume of cell, height being equal, is proportional to the base of the same cell.

If, therefore, changing the rhombohedron from hexagonal to cubic lattice, the height  $h$ , which would increase from  $h^I$  to  $h^{II}$ , is maintained constant, volume being equal, then the base of the rhombohedron necessarily increases during the processing.

It follows that the minimum volume of the rhombohedron corresponds to the face-centered cubic lattice, which therefore has the maximum density of the spheres.

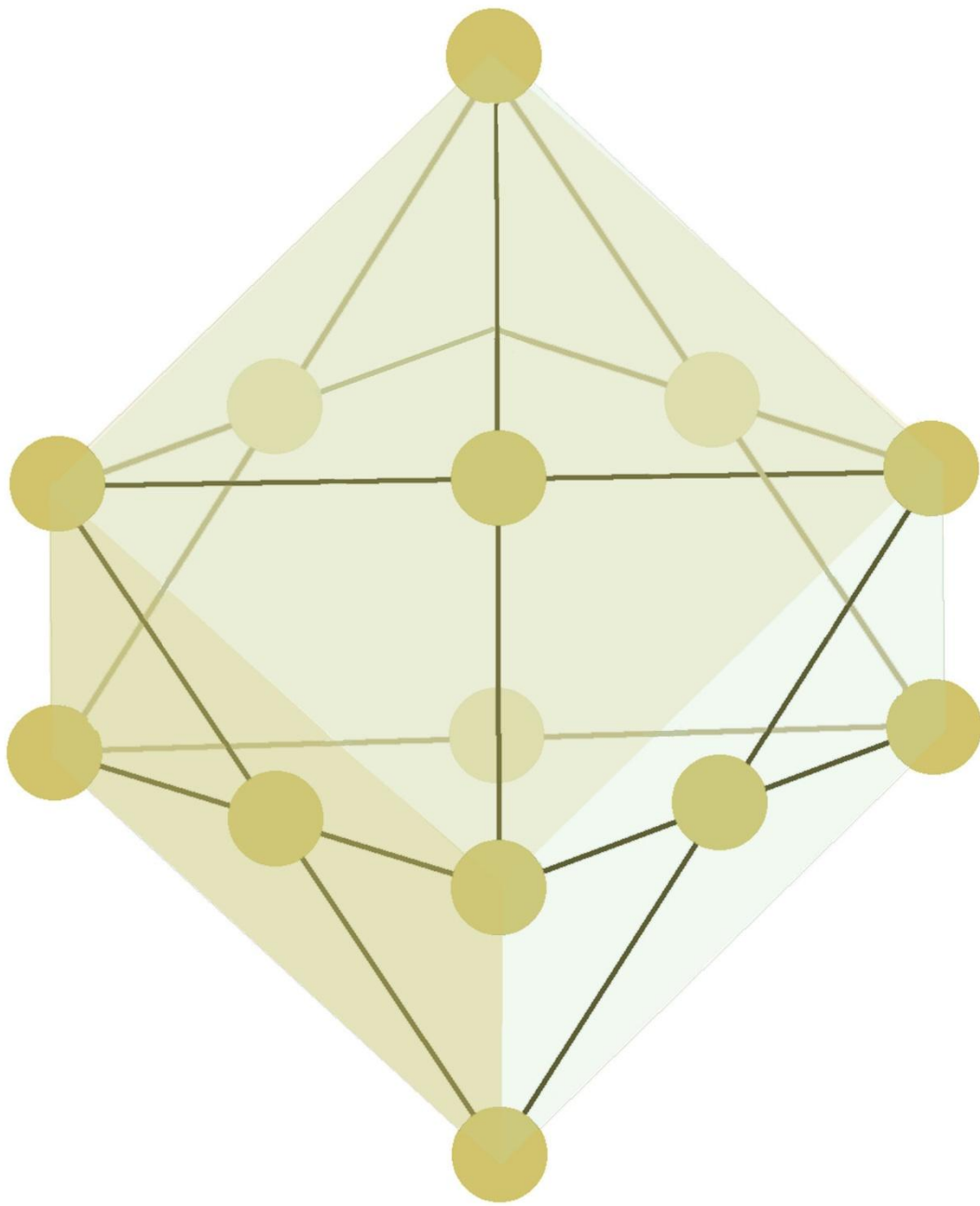


Fig. 1 Schema cristallografico secondo reticolo cubico a facce centrate.

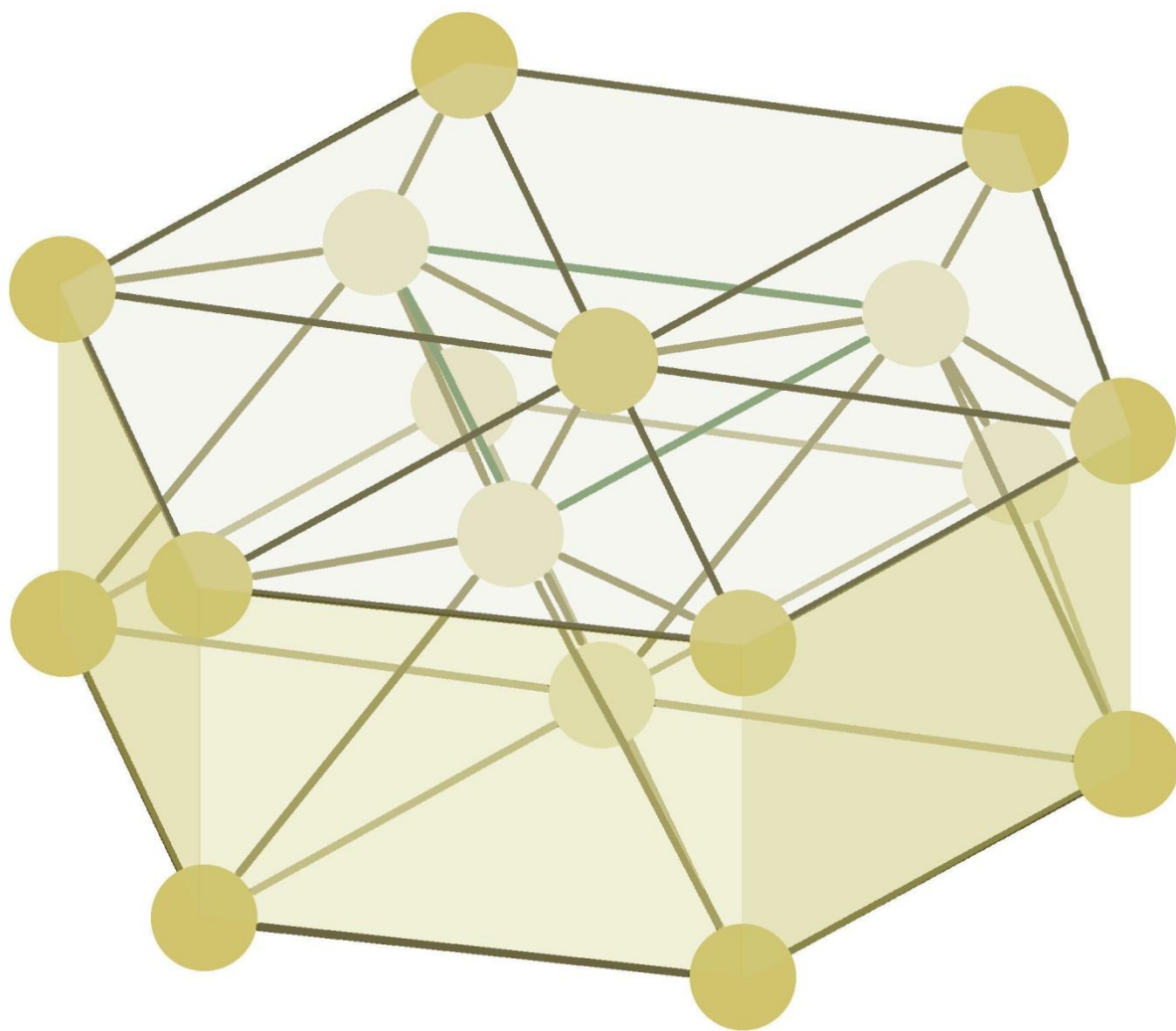


Fig.2 Schema cristallografico a reticolo esagonale.



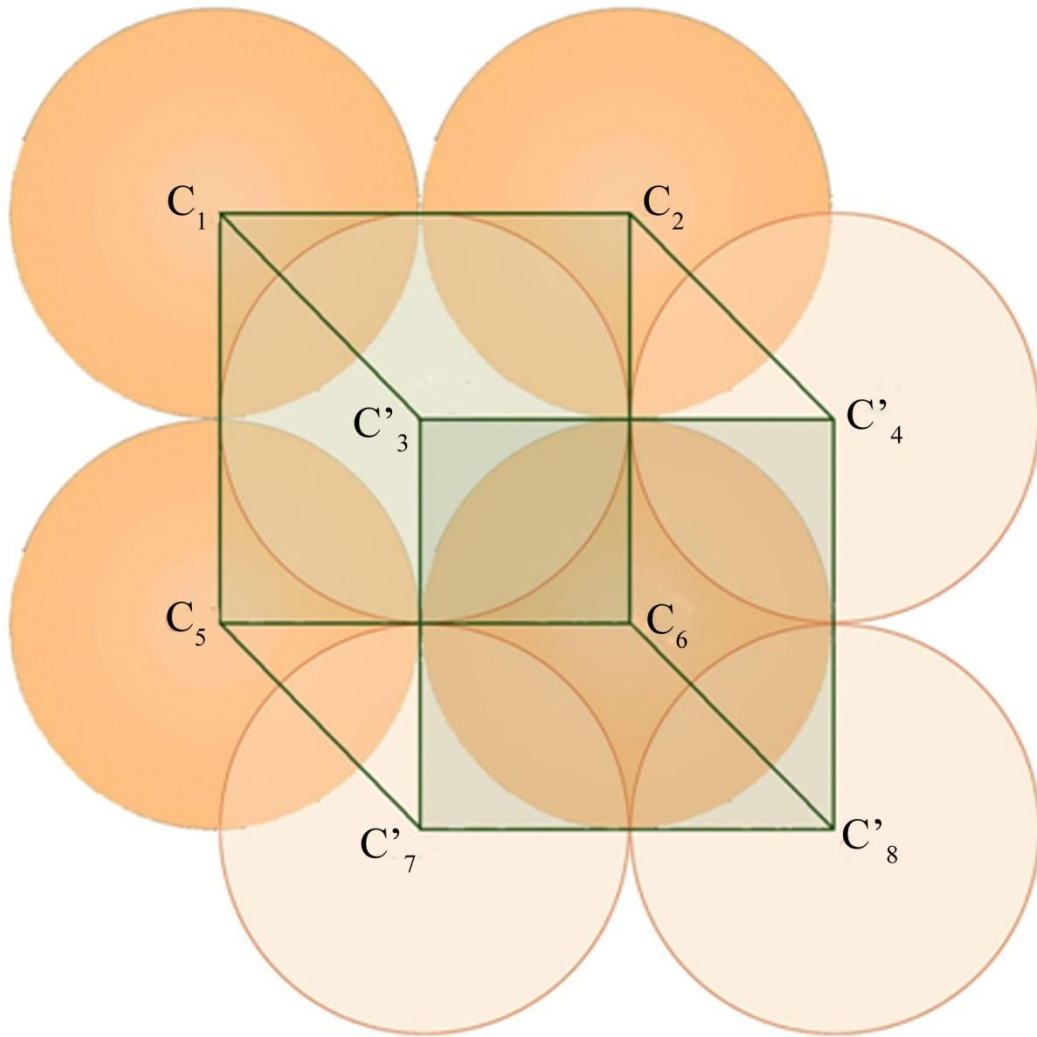


Fig. 4 In verde è velata la cella romboedrica dell'aggregato secondo reticolo cubico a facce centrate.

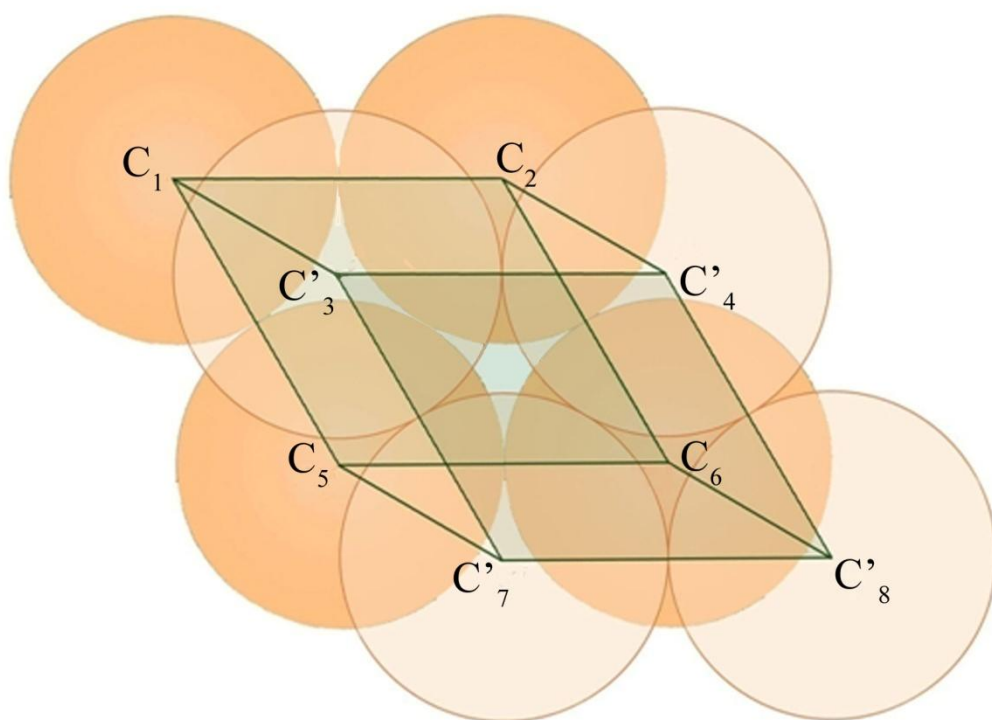


Fig. 5 In verde è velata la cella romboedrica dell'aggregato secondo reticolo esagonale



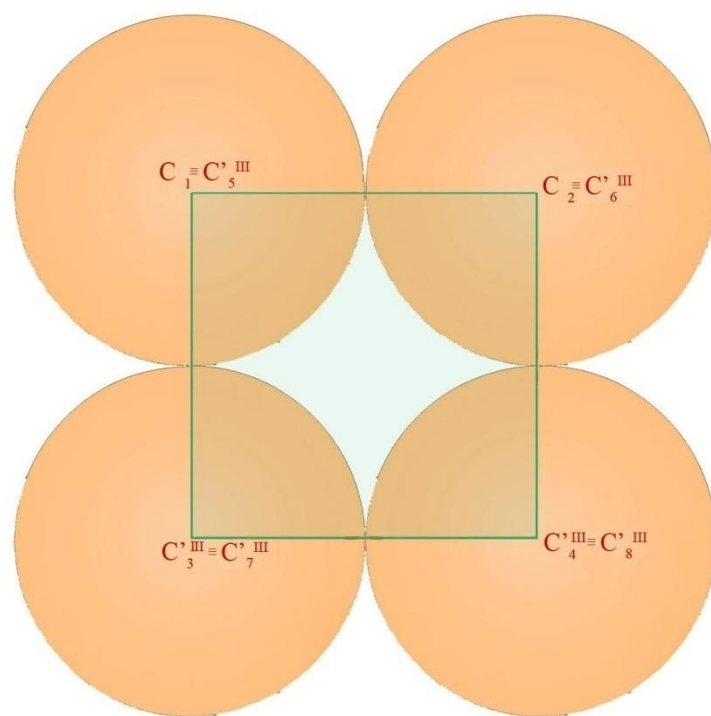


Fig. 6 In verde è velata la cella cubica dell'aggregato secondo reticolo cubico.

## NOTE

(1) Così scrive Keplero a proposito di una questione riguardante la disposizione delle palle di cannone: " In generale quando palle uguali vengono raccolte in un qualunque contenitore esse si dispongono in due modi diversi, secondo i due modi in cui le si può disporre nel piano.

Se palle uguali sono sparse nello stesso piano orizzontale e le si spinge l'una contro l'altra così strettamente che si toccano l'un l'altra, esse si disporranno a triangolo oppure a quadrato.

Nel primo caso sei palle ne circondano una, nel secondo quattro. Complessivamente ciò accade per tutte le palle eccetto quelle più esterne. Con una disposizione pentagonale non si può mantenere l'uniformità.

Una disposizione esagonale si spezza in una triangolare. Così restano da descrivere solo due disposizioni.

Ora, se si procede ad accumulare dei corpi solidi più strettamente possibile e si avvanza strato per strato, le palle avranno o una disposizione quadrata oppure triangolare.

Se quadrata, o una palla superiore poggia su una immediata inferiore, oppure ogni singola palla superiore si accomoderà tra quattro di quelle inferiori. In quest'ultimo modo ogni palla è toccata da quattro vicine nello stesso piano e da una sopra e una sotto, e così via e ognuna è toccata da sei altre. La disposizione sarà cubica, e se schiacciate le palle diventeranno dei cubi. Ma questa non sarà la disposizione più compatta. Nel secondo modo, non solo ogni palla è toccata dalle sue quattro vicine, ma anche da quattro di sotto e quattro di sopra e così in tutto una è toccata da 12, e sotto pressione le palle sferiche diventeranno dei romboidi.

Questo arrangiamento sarà il più compatto possibile così che in nessuna altra disposizione si potrà mettere un maggior numero di palle nello stesso contenitore."

(2) Thomas Hales, *A proof of the Kepler Conjecture*, 2003.

(3) George Szpiro, giornalista scientifico svizzero del *Neue Zürcher Zeitung* e autore del libro, *Kepler's conjecture* ( John wiley & Sons, 2003), racconta: "I controllori delle riviste, per verificare il lavoro di Hales, hanno visto che non bastava sottomettere i dati al programma che aveva scritto lo stesso Hales. Occorreva prima assicurarsi che i software utilizzati realizzassero perfettamente i compiti per i quali erano stati concepiti. Ma è impossibile verificare tutte le linee di programma scritte e tutti i dati immessi e la loro elaborazione. Perché è una massa mostruosa di dati. Alla fine, si è deciso di fare solo controlli di coerenza".

E' stata così messa in piedi una macchina gigantesca, fatta da decine di controllori, di seminari, di verifiche delle ipotesi e delle logiche messe in campo. Ma il risultato non è andato al di là della frase "siamo sicuri al 99% che la dimostrazione è valida".